# Diffraction des neutrons et des rayons X

**Laurent Cormier** 



Institut de Minéralogie et Physique des Milieux Condensés Université Pierre et Marie Curie – CNRS Paris, France

## **Diffusion - Diffraction**



#### **Quelques définitions**





Vecteur d'onde de module  $k_i = 2\pi/\lambda$ Vecteur de diffusion  $\vec{Q} = \vec{k}_d - \vec{k}_i$  λ: longueur d'onde de la particuleincidente2θ : angle de diffraction

Diffusion élastique  $k_i = 2\pi/\lambda = k_d = k$ 

 $Q = 2k\sin\theta$  $Q = 4\pi\sin\theta / \lambda$ 

**A** Q est parfois noté k (surtout en RX)

## Facteur de structure dynamique

$$\frac{d^2\sigma}{d\Omega dE} = \frac{\sigma_s}{4\pi\hbar} \frac{k_i}{k_d} S(\mathbf{Q},\omega)$$

$$S(\mathbf{Q},\omega) = \frac{1}{2\pi} \int \int d\mathbf{r} dt e^{i(\mathbf{Q}\cdot\mathbf{r}-\omega t)} G(\mathbf{r},t)$$

 $G(\mathbf{r},t)$  = Fonctions de correlation de Van Hove

En diffraction des neutrons, séparation en 2 fonctions :

✓ Cohérente :  $G_{coh}(\mathbf{r},t)$  = probabilité, étant donné une particule à l'origine au temps t=0, de trouver une particule à la position **r** au temps t

✓ Incohérente :  $G_{incoh}(r,t)$  = probabilité, étant donné une particule à l'origine au temps t=0, de trouver cette même particule à la position r au temps t = décrit le mouvement d'une particule **Facteur de structure**  $S(Q) = \int_{-\infty}^{+\infty} S(\mathbf{Q}, \omega) d\omega$ 

$$S(\mathbf{Q}) = \frac{1}{2\pi} \int \int d\mathbf{r} dt e^{i\mathbf{Q}\cdot\mathbf{r}} G(\mathbf{r}, t) \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega t} d\omega \implies 2\pi \delta(t)$$
  

$$S(\mathbf{Q}) = \int G(\mathbf{r}, 0) e^{i\mathbf{Q}\cdot\mathbf{r}} d\mathbf{r}$$
  

$$G(\mathbf{r}, 0) = \delta(\mathbf{r}) + \rho_0 g(\mathbf{r})$$
  

$$S(\mathbf{Q}) = 1 + \rho_0 \int [g(\mathbf{r}) - 1] e^{i\mathbf{Q}\cdot\mathbf{r}} d\mathbf{r} + \rho_0 \delta(\mathbf{Q})$$
  
Petits angles

 $\rho_0$  (atome Å<sup>-3</sup>) est la densité atomique moyenne qui s'exprime à partir de la densité macroscopique d(g cm<sup>-3</sup>) :

$$\rho_{0=} \frac{1Na}{A*10^{24}} \qquad \begin{array}{c} A = ma \\ 1'échan \\ 1'échan \\ \end{array}$$

A = masse atomique de l'échantillon

 $\rho_0 g(\mathbf{r})$  mesure les fluctuations locales de densité de la fonction de distribution de paire  $g(\mathbf{r})$  autour de la valeur moyenne  $\rho_0$  $g(\mathbf{r}) =$  probabilité de trouver un atome entre  $\mathbf{r}$  et  $\mathbf{r}$ +d $\mathbf{r}$ , s'il existe un atome à l'origine

## **Matériaux isotropes**

Cas des amorphes, liquides ...

 $\vec{Q}$  devient  $Q = 4\pi \sin\theta/\lambda$ 







## Système monoatomique



## Système polyatomique

## Formalisme de Faber-Ziman



 $g_{\alpha\beta}(r)$  et  $S_{\alpha\beta}(Q)$  sont reliés par une transformée de Fourier

$$g_{\alpha\beta}(r) - 1 = \frac{1}{(2\pi)^{3}\rho_{0}} \int_{0}^{\infty} 4\pi Q^{2} \Big[ S_{\alpha\beta}(Q) - 1 \Big] \frac{\sin(Qr)}{Qr} dQ$$

 $g_{\alpha\beta}(r)$  probabilité de trouver un atome  $\beta$  à une distance r d'un atome  $\alpha$ 

## **Fonctions dans l'espace réciproque**

S(Q) facteur de structure F(Q)=S(Q)-1 fonction d'interférence

$$S(Q \to \infty) \to 1 \qquad S(Q) \ge 0$$
$$F(Q \to \infty) \to 0$$



D.A. Keen, *A comparison of various commonly used correlation functions for describing total scattering*, J. Appl. Cryst. 34 172-177 (2001).

## Fonctions dans l'espace réel



## Normalisation

Facteur de structure non-normalisé

$$F(Q) = \sum_{\alpha,\beta} c_{\alpha} c_{\beta} b_{\alpha} b_{\beta} \Big[ S_{\alpha\beta}(Q) - 1 \Big]$$
$$g(r) = \sum_{\alpha,\beta} c_{\alpha} c_{\beta} b_{\alpha} b_{\beta} \Big[ g_{\alpha\beta}(r) - 1 \Big]$$

![](_page_10_Figure_3.jpeg)

## Normalisation

## Facteur de structure normalisé

![](_page_11_Figure_2.jpeg)

## Extraction d'informations de la fonction de correlation

![](_page_12_Figure_1.jpeg)

![](_page_13_Figure_0.jpeg)

P. Debye, *Zerstreuung von Röntgenstrahlen*, Ann. Physik., 46, 809 (1915) B.E. Warren, *X-ray diffraction*, Dover publication, New-York, (1969)

Facteur de structure en RX

$$F(Q) = \sum_{\alpha,\beta} c_{\alpha} c_{\beta} f_{\alpha}(Q) f_{\beta}(Q) \Big[ S_{\alpha\beta}(Q) - 1 \Big]$$

Facteur de forme

$$S_{\alpha\beta}(Q) - 1 = 4\pi\rho_e \int_0^\infty r^2 \left[g_{\alpha\beta}(r) - 1\right] \frac{\sin(Qr)}{Qr} dr$$

Densité électronique

Fonctions de distributions de paires partielles

Facteur de structure de rayons X

$$S_X(Q) = \frac{\left[I(Q) - \overline{f^2}\right]}{\overline{f}^2}$$

I(Q) intensité mesurée

![](_page_14_Figure_9.jpeg)

## **Comparaison entre diffraction des neutrons et rayons X**

Facteur de structure S(Q) : somme des facteurs de structure partiels,  $S_{\alpha\beta}(Q)$  :  $S(Q) = \sum_{\alpha,\beta \ge \alpha} W_{\alpha\beta}(Q) S_{\alpha\beta}(Q)$ 

## **Facteurs pondérants**

#### RX

#### Neutrons

$$W_{\alpha\beta}(Q) = \frac{c_{\alpha}c_{\beta}f_{\alpha}(Q,E)f_{\beta}(Q,E)}{\overline{f(Q,E)}^{2}} \left(2 - \delta_{\alpha\beta}\right) \qquad \qquad W_{\alpha\beta}(Q) = \frac{c_{\alpha}c_{\beta}b_{\alpha}b_{\beta}}{\overline{b}^{2}} \left(2 - \delta_{\alpha\beta}\right)$$

#### **Fonction de corrélation**

RX

Neutrons

$$G(r) = \sum_{\alpha,\beta \ge \alpha} TF(W_{\alpha\beta}) \otimes g_{\alpha\beta}(r)$$

$$G(r) = \sum_{\alpha,\beta \ge \alpha} W_{\alpha\beta} g_{\alpha\beta}(r)$$

Fonctions de distribution de paires partielles :  $g_{\alpha\beta}(\mathbf{r})$ 

![](_page_16_Figure_0.jpeg)

## Comparaison entre diffraction des neutrons et rayons X RX Neutrons

#### f(Q,E) facteur de forme

✓ variation forte de l'intensité diffractée en fonction de θ

![](_page_17_Figure_3.jpeg)

$$\theta = 0, I = Z$$

b longueur de diffusion des neutrons

✓ b pas une fonction monotone du nombre atomique

![](_page_17_Figure_7.jpeg)

## Comparaison entre diffraction des neutrons et rayons X RX Neutrons

- f(Q,E) facteur de forme
- ✓ informations sur éléments de Z élevé
- ✓ petits échantillons
  ✓ radiation cause des dommages aux échantillons

- b longueur de diffusion des neutrons
- $\checkmark$  b indépendante de Q = constante
- $\Rightarrow$  atomes légers sont visibles (H, Li, N, O, etc)
- $\Rightarrow$  possible de distinguer des éléments voisins
- ✓b varie entre différents isotopes

 $\Rightarrow$  substitution isotopique (H/D)

![](_page_18_Figure_11.jpeg)

## **Complémentarité des données de neutrons et rayons X**

![](_page_19_Figure_1.jpeg)

![](_page_20_Figure_0.jpeg)

## Données de diffraction des neutrons par le verre de silice: fonction de distribution radiale

**Solide polyatomique** 

#### **Q(S(Q)-1)**

Fonction de corrélation

![](_page_21_Figure_4.jpeg)

Fig.3. The experimental  $ki(k) \exp(-\alpha^2 k^2)$  for SiO<sub>2</sub>, with  $\alpha = 0.056$  and  $g(k) = f_e$ .

![](_page_21_Figure_6.jpeg)

Recouvrement des distributions de paires partielles  $G_{\alpha\beta}(r)$ 

**Verre SiO**<sub>2</sub>

Fig.4. The pair function distribution curves for SiO<sub>2</sub>. A is the measured curve. The computed contributions are given by: B, Si-O; C, O-O; D, Si-Si; E, Si-2nd O; F, O-2nd O; G, Si-2nd Si.

## Extraire des informations des données de diffraction : modélisations numériques

![](_page_22_Figure_1.jpeg)

Dynamique Moléculaire classique Dynamique Moléculaire ab initio RMC et EPSR

![](_page_22_Picture_3.jpeg)

A.C. Wright, *The comparison of molecular dynamics simulations with diffraction experiments*, J. Non-Cryst. Solids, 159, 264-268 (1993)

## Extraire des informations des données de diffraction : méthodes expérimentales de contraste

Système de *n* espèces chimiques

Nombre de  $S_{\alpha\beta}(Q)$  indépendant: n(n+1)/2

$$F(Q) = \sum_{\alpha,\beta} c_{\alpha} c_{\beta} b_{\alpha} b_{\beta} \left[ S_{\alpha\beta}(Q) - 1 \right] \longrightarrow$$

Il faut N= n(n+1)/2 expériences différentes !

Méthode de différence

Neutron : substitution isotopique

Rayons X : diffusion anomale

#### **Substitution isotopique (diffraction de neutrons)**

#### Méthode de première différence

M = élément substitué

$$F_{\exp 1}(Q) = \sum_{\alpha} c_{\alpha} b_{\alpha}^{2} + \sum_{\alpha,\beta\neq M} c_{\alpha} c_{\beta} b_{\alpha} b_{\beta} \left( S_{\alpha\beta}(Q) - 1 \right) + \sum_{M,\alpha} c_{\alpha} c_{M} b_{\alpha} b_{M1} \left( S_{M\alpha}(Q) - 1 \right)$$
Échantillon 1  

$$F_{\exp 2}(Q) = \sum_{\alpha} c_{\alpha} b_{\alpha}^{2} + \sum_{\alpha,\beta\neq M} c_{\alpha} c_{\beta} b_{\alpha} b_{\beta} \left( S_{\alpha\beta}(Q) - 1 \right) + \sum_{M,\alpha} c_{\alpha} c_{M} b_{\alpha} b_{M2} \left( S_{M\alpha}(Q) - 1 \right)$$
Échantillon 2  

$$\Delta F(Q) = F_{\exp 1}(Q) - F_{\exp 2}(Q)$$

$$\Delta F(Q) = \sum_{\alpha\neq M} A \left( S_{M\alpha}(Q) - 1 \right) + B \left( S_{MM}(Q) - 1 \right)$$

avec 
$$A = 2c_{\alpha}c_{M}b_{\alpha}(b_{M1} - b_{M2})$$
  $B = c_{M}^{2}(b_{M1}^{2} - b_{M2}^{2})$ 

L. Cormier et al., *Cationic environment in silicate glasses studied by neutron diffraction with isotopic substitution*, Chem. Geol. 174, 349 (2001)

#### **Substitution isotopique (diffraction de neutrons)**

#### Méthode de première différence

M = élément substitué

$$F_{\exp 1}(Q) = \sum_{\alpha} c_{\alpha} b_{\alpha}^{2} + \sum_{\alpha, \beta \neq M} c_{\alpha} c_{\beta} b_{\alpha} b_{\beta} (S_{\alpha\beta}(Q) - 1) + \sum_{M, \alpha} c_{\alpha} c_{M} b_{\alpha} b_{M1} (S_{M\alpha}(Q) - 1)$$
Échantillon 1  

$$F_{\exp 2}(Q) = \sum_{\alpha} c_{\alpha} b_{\alpha}^{2} + \sum_{\alpha, \beta \neq M} c_{\alpha} c_{\beta} b_{\alpha} b_{\beta} (S_{\alpha\beta}(Q) - 1) + \sum_{M, \alpha} c_{\alpha} c_{M} b_{\alpha} b_{M2} (S_{M\alpha}(Q) - 1)$$
Échantillon 2  

$$\Delta F(Q) = F_{\exp 1}(Q) - F_{\exp 2}(Q)$$

$$\Delta F(Q) = \sum_{\alpha \neq M} A(S_{M\alpha}(Q) - 1) + B(S_{MM}(Q) - 1)$$

avec 
$$A = 2c_{\alpha}c_{M}b_{\alpha}(b_{M1} - b_{M2})$$
  $B = c_{M}^{2}(b_{M1}^{2} - b_{M2}^{2})$ 

L. Cormier et al., *Cationic environment in silicate glasses studied by neutron diffraction with isotopic substitution*, Chem. Geol. 174, 349 (2001)

Pour un système binaire avec 2 espèces  $\alpha, \beta$ :

 $\overline{b}^{2}[S(Q)-1] = \sum_{\alpha,\beta} c_{\alpha}c_{\beta}b_{\alpha}b_{\beta}[S_{\alpha\beta}(Q)-1]$  F(Q)

#### Equation matricielle

$$\begin{pmatrix} F_{\exp 1}(Q) \\ F_{\exp 2}(Q) \\ F_{\exp 3}(Q) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{\alpha}^{2}b_{\alpha 1}^{2} & c_{\beta}^{2}b_{\beta 1}^{2} & c_{\alpha}c_{\beta}b_{\alpha 1}b_{\beta 1} \\ c_{\alpha}^{2}b_{\alpha 2}^{2} & c_{\beta}^{2}b_{\beta 2}^{2} & c_{\alpha}c_{\beta}b_{\alpha 2}b_{\beta 2} \\ c_{\alpha}^{2}b_{\alpha 3}^{2} & c_{\beta}^{2}b_{\beta 3}^{2} & c_{\alpha}c_{\beta}b_{\alpha 3}b_{\beta 3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_{\alpha\alpha}(Q) \\ F_{\beta\beta}(Q) \\ F_{\beta\beta}(Q) \\ F_{\alpha\beta}(Q) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_{\alpha\alpha}(Q) \\ F_{\beta\beta}(Q) \\ F_{\alpha\beta}(Q) \end{pmatrix}$$

Composition fixe: constantes  $c_{\alpha}$ ,  $c_{\beta}$ 

Isotopes avec un bon contraste  $b_{\alpha i}$ : longueur de diffusion de l'isotope *i* de l'espèce  $\alpha$ 

L'inversion permet de déterminer les facteurs de structure partiels  $S_{ab}(Q)$  :

$$\begin{bmatrix} F_{\exp}(Q) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_{\alpha\beta}(Q) \end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix} F_{\alpha\beta}(Q) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} F_{\exp}(Q) \end{bmatrix}$$

![](_page_26_Figure_8.jpeg)

Possibilité de faire substitution isomorphique :

Deux éléments chimiques différents avec rayon ionique similaire (même place dans la structure ?) mais b différent

## Substitution isotopique (diffraction de neutrons)

Données de diffraction des neutrons: distribution radiale partielle

![](_page_27_Figure_2.jpeg)

#### **Diffusion anomale (diffraction des rayons X)**

f' et f" varient fortement

Facteur de diffusion atomique :  $f(Q,E) = f_0(Q) + f'(Q,E) + i f''(Q,E)$ 

![](_page_28_Figure_3.jpeg)

## **Diffusion anomale (diffraction des rayons X)**

2 expériences à 2 énergies (λ) différentes : au seuil d'absorption (λ1 ou λ2) et loin du seuil (λ3)

![](_page_29_Figure_2.jpeg)

Energie des rayons X (eV)

1 seul échantillon est nécessaire

**Δ** Domaine en Q définie par Q =  $4 \pi \sin\theta / \lambda$ En pratique, intéressant pour des éléments au dessus de ~Fe sinon domaine en Q trop faible

![](_page_30_Figure_0.jpeg)

## **Bibliographie**

Squires, G. L. *Introduction to the theory of thermal neutron scattering*, Cambridge University Press: Cambridge (1978).

A.C. Wright, *The structure of amorphous solids by x-ray and neutron diffraction*, Advances in Structure Research by Diffraction Methods 5, 1 (1974).

Chieux, P. In *Neutron diffraction*, Dachs, H., Ed., Springer-Verlag: Berlin, (1978).

L. Cormier, *La structure des verres étudiée par diffraction des neutrons*, J. Phys. IV, 111, 187-210 (2003).

H. E. Fischer, A. C. Barnes, P. S. Salmon, *Neutron and x-ray diffraction studies of liquids and glasses*, Reports on Progress in Physics 69, 233-299 (2006).