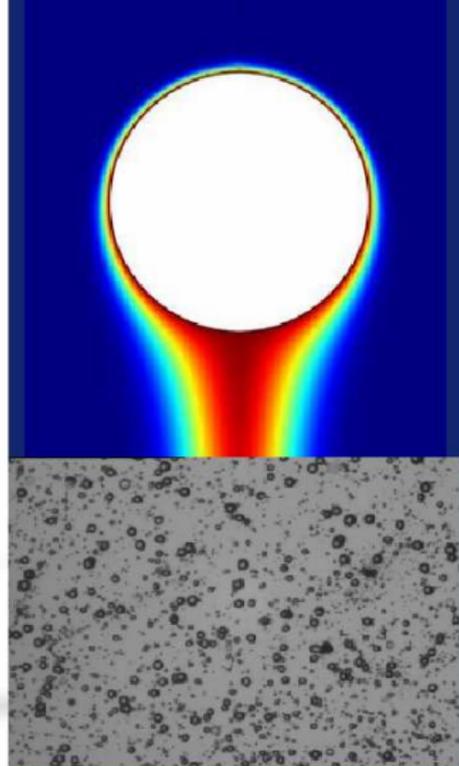


Simulation numérique à l'échelle macroscopique par la méthode des éléments finis

F. Pigeonneau

Surface du Verre et Interfaces, UMR 125
CNRS/Saint-Gobain, France




SAINT-GOBAIN

Plan

1. Introduction
2. Quelques équations aux dérivées partielles (EDP)
3. Classification des EDP
4. Formulation variationnelle
5. Méthode des résidus pondérés
6. Vers la méthode des éléments finis : Equation à une dimension
7. Méthode des éléments finis à 2 et 3 dimensions
8. Quelques exemples de problèmes
9. Travaux dirigés

Introduction

- La physique, la thermo. des phéno. irréver., la mécanique présentent une large gamme d'équations aux dérivées partielles (EDP).
- Les solutions exactes sont rares et limitées à des situations simples.
- Le recours à la recherche de solutions alternatives s'impose \implies méthode numérique.
- Bien que les ordinateurs soient de plus en plus puissants, ils restent "finis" \implies résolution discrète du problème.

Introduction

■ Parmi les approximations discrètes :

● Méthode des différences finies :

- ▶ locale ;
- ▶ développement fini des dérivées ;
- ▶ simple mais peu généralisable aux géométries complexes.

● Méthode des volumes finis :

- ▶ locale ;
- ▶ basée sur l'écriture d'équation de conservation sur des petits volumes de contrôle ;
- ▶ adaptée aux géométries complexes et très utilisée en méca. des fluides compressibles.

● Méthode des éléments finis :

- ▶ locale ;
- ▶ basée sur la formulation variationnelle ou "faible" du pb. continu ;
- ▶ adaptée aux géométries complexes et très utilisée en méca. des solides ;
- ▶ mais de plus en plus utilisée pour d'autres physiques.

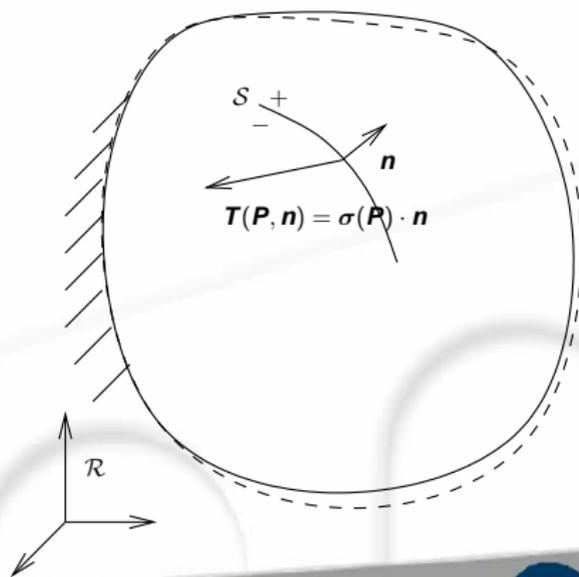
Quelques équations aux dérivées partielles (EDP)

- Les mécaniques des structures et des fluides sont basées sur la mécanique des milieux continus (MMC).
- MMC suppose que la matière est sans trous.
- Cette théorie ne peut pas se déduire de la mécanique du point.
- Elle repose sur la description d'entités matérielles :
 - En chaque point, on définit des grandeurs macroscopiques : $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$, $\rho(\mathbf{x}, t)$, $\mathbf{U}(\mathbf{x}, t)$, $\gamma(\mathbf{x}, t)$.

Quelques équations aux dérivées partielles (EDP)

Elasticité linéaire

- Déformations faibles \implies utilisation de la configuration de référence.
- Existence d'un tenseur de contrainte (Cauchy, 1822).



Quelques équations aux dérivées partielles (EDP)

Elasticité linéaire

- Etat de déformation décrit par

$$\mathbf{e}_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (1)$$

- Solide homogène et isotrope :

$$\sigma(\mathbf{P})_{ij} = \lambda \text{tr}(\mathbf{e}) \delta_{ij} + 2\mu \mathbf{e}_{ij}, \quad (2)$$

- λ et μ sont les coefficients de Lamé.

- Equations de l'élasticité :

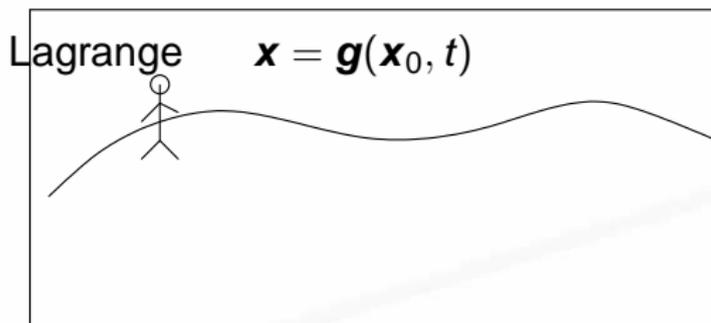
$$\rho \gamma = \text{div } \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{f}, \quad (3)$$

$$\rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = \mu u_{i,jj} + (\lambda + \mu) u_{j,ji} + f_i. \quad (4)$$

Quelques équations aux dérivées partielles (EDP)

Mécanique des fluides

■ Descriptions cinématiques



Quelques équations aux dérivées partielles (EDP)

Mécanique des fluides

■ Descriptions cinématiques

$$\frac{\partial}{\partial t} = \left(\frac{\partial}{\partial t} \right)_{\mathbf{x}} : \text{dérivée temporelle à } \mathbf{x} \text{ fixé,} \quad (5)$$

$$\frac{D}{Dt} = \left(\frac{\partial}{\partial t} \right)_{\mathbf{x}_0} : \text{dérivée temporelle à } \mathbf{x}_0 \text{ fixé.} \quad (6)$$

$$\frac{Df}{Dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{grad} f \cdot \mathbf{U}, \quad (7)$$

$$\frac{D\mathbf{U}}{Dt} = \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \mathbf{grad} \mathbf{U} \cdot \mathbf{U}. \quad (8)$$

Quelques équations aux dérivées partielles (EDP)

Mécanique des fluides

■ Loi de comportement des fluides visqueux :

- l'état de contraintes ne dépend que du tenseur des taux de déformations.

$$d_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right). \quad (9)$$

■ Pour un fluide newtonien (comportement linéaire) :

$$\boldsymbol{\sigma} = -P\mathbf{I} + \lambda \text{tr}(\mathbf{d})\mathbf{I} + 2\mu\mathbf{d}. \quad (10)$$

■ Les équations générales (Navier-Stokes) :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho\mathbf{U}) = 0, \quad (11)$$

$$\rho \frac{D\mathbf{U}}{Dt} = -\mathbf{grad} P + (\lambda + \mu) \mathbf{grad}(\text{div} \mathbf{U}) + \mu \Delta \mathbf{U} + \mathbf{f}. \quad (12)$$

Classification des EDP

■ EDP sur une variable $u(x, y)$:

$$A \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + B \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + D \frac{\partial u}{\partial x} + E \frac{\partial u}{\partial y} + Fu + G = 0. \quad (13)$$

■ Si $B^2 - 4AC < 0$:

- elliptique ;

■ Si $B^2 - 4AC = 0$:

- parabolique ;

■ Si $B^2 - 4AC > 0$:

- hyperbolique.

■ Important à connaître car conditionne :

- les types de conditions aux limites ;
- le choix de la méthode numérique.

Classification des EDP

Exemples

■ Equation de Laplace :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0. \quad (14)$$

- u à fixer sur une partie ou sur toute la frontière.

■ Equation de diffusion instationnaire :

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \kappa \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right). \quad (15)$$

- T doit être connue à l'instant initial.
- T peut être spécifiée ou non sur la frontière.

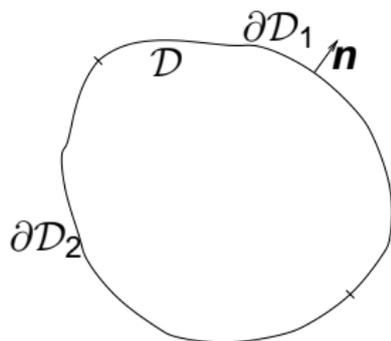
■ Equation des cordes vibrantes :

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \quad (16)$$

- Idem que T .

Formulation variationnelle

Equation elliptique



$$-\Delta u = g, \quad (17)$$

$$u = u_1, \text{ sur } \partial D_1, \quad (18)$$

$$\frac{\partial u}{\partial n} = \frac{\partial u}{\partial x_j} n_j = \phi, \text{ sur } \partial D_2. \quad (19)$$

■ La formulation variationnelle :

- Multiplication par une fonction "test" ;
- Intégration sur le domaine.

Formulation variationnelle

Equation elliptique

- Définition des espaces de fonctions (Sobolev) :

$$H^2(\mathcal{D}) = \{v \in L^2(\mathcal{D}), \partial^m v \in L^2(\mathcal{D}) \text{ avec } m \leq 2, v|_{\partial\mathcal{D}_1} = 0\}. \quad (20)$$

$$H^1(\mathcal{D}) = \{v \in L^2(\mathcal{D}), \partial v \in L^2(\mathcal{D}), v|_{\partial\mathcal{D}_1} = 0\}. \quad (21)$$

- Trouver $u \in H^1(\mathcal{D})$ tel que

$$a(u, v) = \int_{\mathcal{D}} g v dS + \int_{\partial\mathcal{D}_2} \phi v dl, \quad \forall v \in H^1(\mathcal{D}), \quad (22)$$

$$a(u, v) = \int_{\mathcal{D}} \mathbf{grad} u \cdot \mathbf{grad} v dS. \quad (23)$$

- Il s'agit d'une formulation "faible" \implies réduction d'un ordre des dérivées.
- Le pb est dit variationnelle car il revient à minimiser la fonctionnelle

$$J(v) = \frac{1}{2} a(v, v) - \int_{\mathcal{D}} g v dS - \int_{\partial\mathcal{D}_2} \phi v dl. \quad (24)$$

Formulation variationnelle

Equation de l'élasticité

- Sur un domaine \mathcal{D} dont la frontière est partitionnée en deux, on considère le problème suivant :

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + f_i = 0, \quad (25)$$

$$\mathbf{u} = 0, \text{ sur } \partial\mathcal{D}_1, \quad (26)$$

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{T}, \text{ sur } \partial\mathcal{D}_2. \quad (27)$$

- Définition des espaces de fonctions (Sobolev) :

$$\mathbf{H}^2(\mathcal{D}) = \{\mathbf{v} \in L^2(\mathcal{D})^3, \partial^m \mathbf{v} \in L^2(\mathcal{D})^3 \text{ avec } m \leq 2, \mathbf{v}|_{\partial\mathcal{D}_1} = 0\} \quad (28)$$

$$\mathbf{H}^1(\mathcal{D}) = \{\mathbf{v} \in L^2(\mathcal{D})^3, \partial \mathbf{v} \in L^2(\mathcal{D}), \mathbf{v}|_{\partial\mathcal{D}_1} = 0\}. \quad (29)$$

- Trouver $\mathbf{u} \in \mathbf{H}^1(\mathcal{D})$ tel que

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_{\mathcal{D}} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} dV + \int_{\partial\mathcal{D}_2} \mathbf{T} \cdot \mathbf{v} dS, \quad \forall \mathbf{v} \in V, \quad (30)$$

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_{\mathcal{D}} \sigma_{ij}(\mathbf{u}) e_{ij}(\mathbf{v}) dV. \quad (31)$$

Formulation variationnelle

Equation de l'élasticité

- Revient à minimiser la fonctionnelle :

$$J(\mathbf{v}) = \frac{1}{2}a(\mathbf{v}, \mathbf{v}) - \int_{\mathcal{D}} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v}dV - \int_{\partial\mathcal{D}_2} \mathbf{T} \cdot \mathbf{v}dS. \quad (32)$$

- Principe des travaux virtuels :

- Parmi tous les champs cinématiquement admissibles, le champ réel est celui qui minimise l'énergie.

Formulation variationnelle

Equations de Stokes

- Ecoulement d'un fluide très visqueux incompressible dans un domaine \mathcal{D} :

$$\operatorname{div} \mathbf{U} = 0, \quad (33)$$

$$-\mu \Delta \mathbf{U} + \operatorname{grad} P = 0, \quad (34)$$

$$\mathbf{U} = \mathbf{g} \text{ sur } \partial \mathcal{D}. \quad (35)$$

- Deux espaces, l'un pour la vitesse et l'autre pour la pression :

$$\mathbf{H}_0^1 = \{ \mathbf{v} \in [L^2(\mathcal{D})]^3, \partial \mathbf{v} \in [L^2(\mathcal{D})]^3, \mathbf{v}|_{\partial \mathcal{D}} = 0 \}, \quad (36)$$

$$L_0^2 = \{ q \in L^2(\mathcal{D}), \int_{\mathcal{D}} q dV = 0 \}. \quad (37)$$

Formulation variationnelle

Equations de Stokes

■ Trouver $(\mathbf{U}, P) \in \mathbf{H}_0^1(\mathcal{D}) \times L_0^2(\mathcal{D})$ tel que

$$\begin{cases} a(\mathbf{U}, \mathbf{V}) + b(\mathbf{V}, p) = 0, \quad \forall \mathbf{V} \in \mathbf{H}_0^1(\mathcal{D}), \\ b(\mathbf{U}, q) = 0, \quad \forall q \in L_0^2(\mathcal{D}), \end{cases} \quad (38)$$

où $a(\mathbf{U}, \mathbf{V})$ et $b(\mathbf{U}, q)$ sont donnés par

$$a(\mathbf{U}, \mathbf{V}) = \int_{\mathcal{D}} \mu \frac{\partial U_i}{\partial x_j} \frac{\partial V_i}{\partial x_j} dV, \quad (39)$$

$$b(\mathbf{U}, q) = - \int_{\mathcal{D}} q \operatorname{div} \mathbf{U} dV. \quad (40)$$

Formulation variationnelle

Equations de Stokes

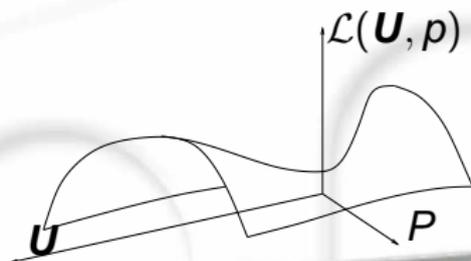
- On peut définir la fonctionnelle suivante

$$\mathcal{L}(\mathbf{V}, q) = \frac{1}{2}a(\mathbf{V}, \mathbf{V}) + b(\mathbf{V}, q). \quad (41)$$

- Le problème de Stokes admet une solution unique si on a

$$\mathcal{L}(\mathbf{U}, q) \leq \mathcal{L}(\mathbf{U}, P) \leq \mathcal{L}(\mathbf{V}, P), \quad \forall (\mathbf{V}, q) \in \mathbf{H}_0^1(\mathcal{D}) \times L_0^2(\mathcal{D}). \quad (42)$$

- Problème de type “point selle”.



Méthode des résidus pondérés

- C'est un premier pas vers une discrétisation.
- On considère le problème continu

$$\mathbf{L}(\mathbf{u}) = \mathbf{f}, \forall \mathbf{x} \in \mathcal{D}, \quad (43)$$

$$\mathbf{M}(\mathbf{u}) = \mathbf{t} \forall \mathbf{x} \in \partial\mathcal{D}. \quad (44)$$

- \mathbf{u} est prise sous la forme d'une série

$$\bar{\mathbf{u}} = \sum_{n=1}^N \mathbf{a}_n \phi_n. \quad (45)$$

- Le problème continu n'est plus rigoureusement satisfait.
On définit alors les résidus :

$$\mathbf{R}(\bar{\mathbf{u}}) = \mathbf{L}(\bar{\mathbf{u}}) - \mathbf{f}, \quad (46)$$

$$\mathbf{B}(\bar{\mathbf{u}}) = \mathbf{M}(\bar{\mathbf{u}}) - \mathbf{t}. \quad (47)$$

Méthode des résidus pondérés

- La méthode des résidus pondérés consiste à minimiser l'erreur sur tout le domaine :

$$\int_{\mathcal{D}} \mathbf{R}(\bar{\mathbf{u}}) \cdot \mathbf{W}_m dV + \int_{\partial\mathcal{D}} \mathbf{B}(\bar{\mathbf{u}}) \cdot \mathbf{W}_m dS = 0, \text{ pour } m = 1 \text{ à } N. \quad (48)$$

- Le choix de \mathbf{W}_m appelée fonction "test" permet de définir différentes méthodes :

- Si $\mathcal{D} = \cup_{n=1}^N \mathcal{D}_n$ tel que $\mathcal{D}_n \cap \mathcal{D}_m = \emptyset \forall n \neq m$ et $\mathbf{W}_m = 1$ sur $\mathcal{D}_m \implies$ méthode des volumes finis.
- Si $\mathbf{W}_m = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_m) \implies$ méthode de collocation (méthode des différences finies et méthode spectrale).
- Si

$$\mathbf{W}_m = \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \mathbf{a}_m} \text{ sur } \mathcal{D}, \quad \mathbf{W}_m = \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial \mathbf{a}_m} \text{ sur } \partial\mathcal{D}, \quad (49)$$

on minimise l'erreur quadratique \implies méthode des moindres carrés.

- Si $\mathbf{W}_m = \phi_m \implies$ méthode de Galerkin.

Vers la méthode des éléments finis : Equation à une dimension

■ On considère le pb elliptique suivant sur l'ouvert $\Omega =]0, 1[$:

$$-\frac{d^2u}{dx^2} = f \text{ sur } \Omega =]0, 1[, \quad (50)$$

$$u(0) = u(1) = 0. \quad (51)$$

■ On écrit la formulation variationnelle : Trouver $u \in H_0^1$ tel que

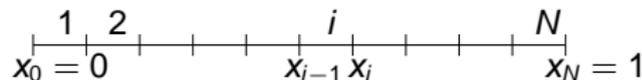
$$a(u, v) = \int_0^1 f v dx, \quad \forall v \in H_0^1 \quad (52)$$

$$a(u, v) = \int_0^1 \frac{du}{dx} \frac{dv}{dx} dx, \quad (53)$$

$$H_0^1(\Omega) = \{v \in L^2(\Omega), \frac{dv}{dx} \in L^2(\Omega), v(0) = v(1) = 0\}. \quad (54)$$

Vers la méthode des éléments finis : Equation à une dimension

- On discrétise le domaine

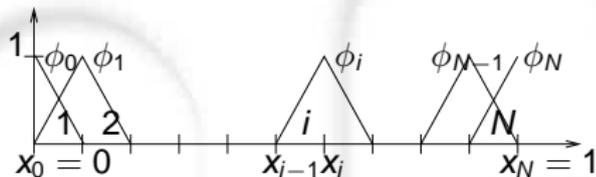


- u est cherchée sous la forme

$$u_h = \sum_{i=0}^N u_i \phi_i(x), \quad (55)$$

où les fonctions de forme (ou de base) $\phi_i(x)$ sont définies

$$\phi_i(x) = \begin{cases} \frac{x-x_{i-1}}{h}, & \text{si } x \in [x_{i-1}, x_i], \\ \frac{x_{i+1}-x}{h}, & \text{si } x \in [x_i, x_{i+1}], \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (56)$$



Vers la méthode des éléments finis : Equation à une dimension

- Le problème variationnelle est formulé au sens de Galerkin :

$$a(u_h, \phi_i) = \int_0^1 f \phi_i dx, \quad 0 \leq i \leq N. \quad (57)$$

- Compte-tenu du support assez petit de ϕ_i , on obtient le système :

$$a(\phi_0, \phi_0)u_0 + a(\phi_1, \phi_0)u_1 = \int_0^{x_1} f \phi_0 dx, \quad (58)$$

$$a(\phi_{i-1}, \phi_i)u_{i-1} + a(\phi_i, \phi_i)u_i + a(\phi_{i+1}, \phi_i)u_{i+1} = \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} f \phi_i dx, \quad (59)$$

pour $i = 1$ à $N - 1$

$$a(\phi_{N-1}, \phi_N)u_{N-1} + a(\phi_N, \phi_N)u_N = \int_{x_{N-1}}^{x_N} f \phi_N dx. \quad (60)$$

Vers la méthode des éléments finis : Equation à une dimension

■ En explicitant le calcul de $a(\phi_j, \phi_i)$, on a

$$\frac{1}{h}u_0 - \frac{1}{h}u_1 = b_0, \quad (61)$$

$$-\frac{1}{h}u_{i-1} + \frac{2}{h}u_i - \frac{1}{h}u_{i+1} = b_i, \quad (62)$$

pour $i = 1$ à $N - 1$

$$-\frac{1}{h}u_{N-1} + \frac{1}{h}u_N = b_N. \quad (63)$$

■ Deux remarques importantes :

- Méthode locale.
- Avec des éléments linéaires, on obtient une formulation équivalente à la méthode des différences finies.

Vers la méthode des éléments finis : Equation à une dimension

■ Appliquons à l'équation suivante

$$-\frac{d^2 u}{dx^2} = \sin(\pi x), \text{ sur } \Omega =]0, 1[, \quad (64)$$

$$u(0) = u(1) = 0. \quad (65)$$

de solution exacte

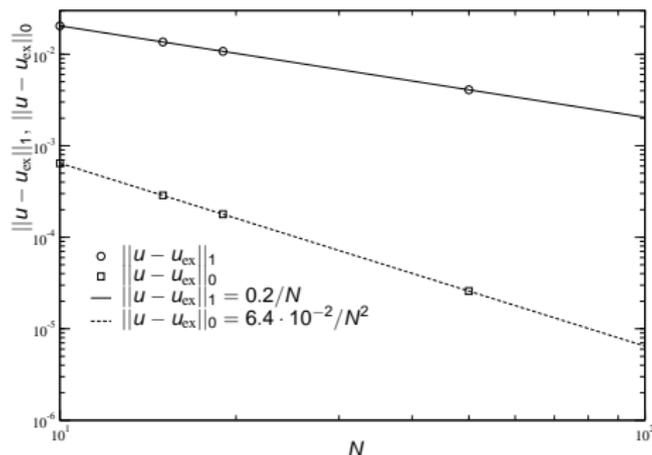
$$u_{\text{ex}}(x) = \frac{\sin(\pi x)}{\pi^2}. \quad (66)$$

■ Détermination de l'erreur suivant deux normes

$$\|u\|_1 = \sqrt{\int_0^1 \left[u^2 + \left(\frac{du}{dx} \right)^2 \right] dx}, \quad (67)$$

$$\|u\|_0 = \sqrt{\int_0^1 u^2 dx}. \quad (68)$$

Vers la méthode des éléments finis : Equation à une dimension



■ Résultat général en méthode des éléments finis :

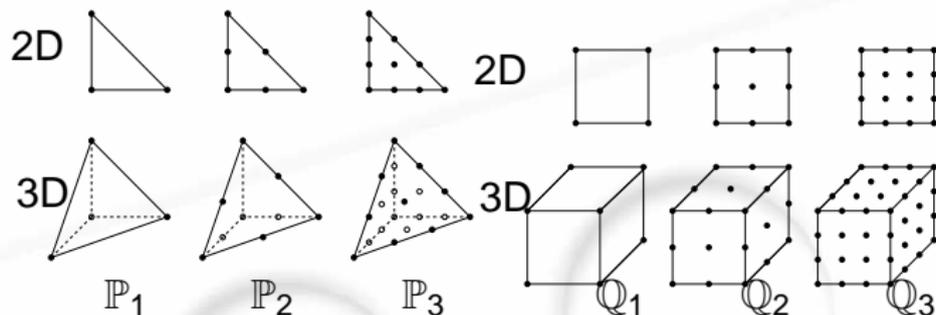
$$\|u - I(u)\|_1 = \mathcal{O}(h), \quad \|u - I(u)\|_0 = \mathcal{O}(h^2). \quad (69)$$

■ Si on prend des polynômes d'ordre plus élevé, \mathbb{P}_k :

$$\|u - I(u)\|_1 = \mathcal{O}(h^k), \quad \|u - I(u)\|_0 = \mathcal{O}(h^{k+1}). \quad (70)$$

Méthode des éléments finis à 2 et 3 dimensions

- L'approche reste exactement la même à plusieurs dimensions.
- On réalise la formulation faible du problème sur un partitionnement discret du domaine.
- Exemples d'éléments finis de référence :



Méthode des éléments finis à 2 et 3 dimensions

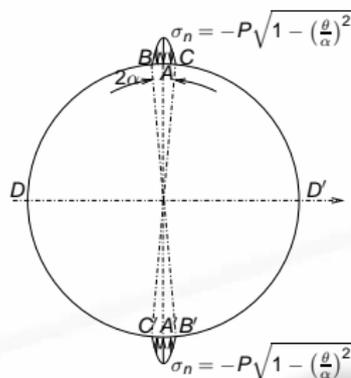
Mise en œuvre numérique

- Discrétisation du domaine avec des éléments les plus parfaits possibles.
- Etablissement de la connectivité des éléments.
- Formulation discrète de problème :
 - Transformation géométrique pour passer d'un élément quelconque à un élément de référence ;
 - Intégration numérique réalisée à l'aide de méthodes de quadrature de type Gauss ;
 - Calcul des coefficients non-nuls uniquement.
- Résolution du système linéaire :
 - Méthodes directes ;
 - Méthodes itératives.
- Sauvegarde des résultats.

Quelques exemples de problèmes

Compression diamétrale d'un disque

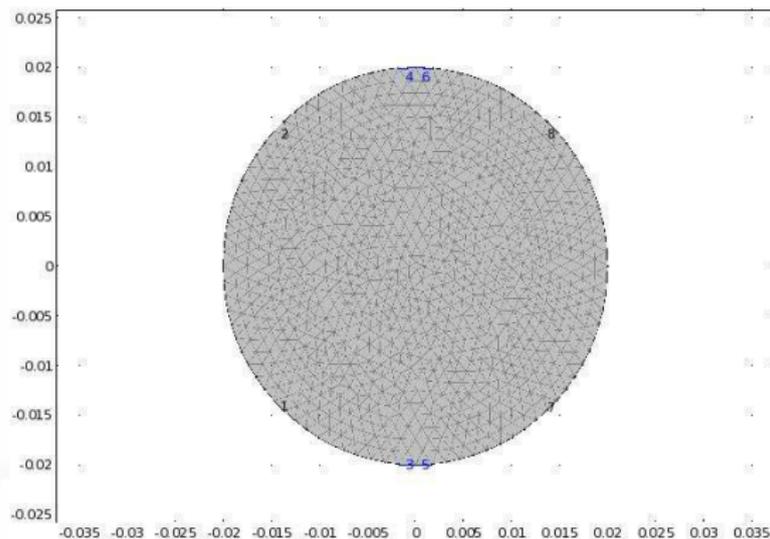
- Problème d'élasticité en contrainte plane : essai brésilien utilisé pour les matériaux fragiles comme le verre ou le béton.



- Imposition d'efforts de compression.
- Le reste du domaine reste libre de contrainte.
- On impose la composante suivant l'axe y à zéro en D et D' .

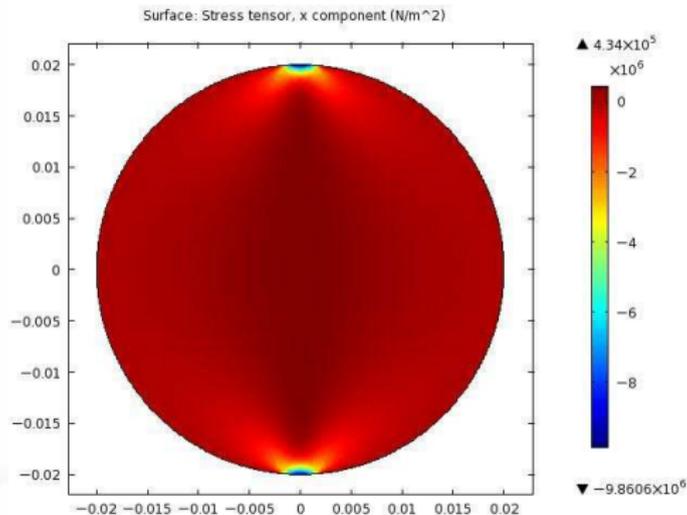
Quelques exemples de problèmes

Compression diamétrale d'un disque



Quelques exemples de problèmes

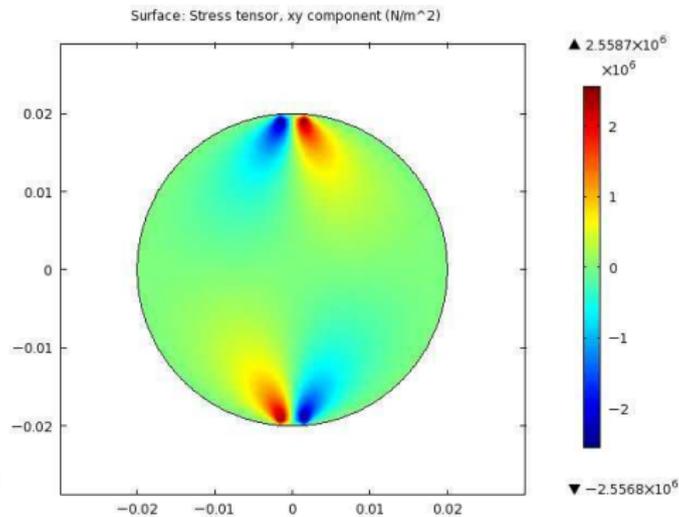
Compression diamétrale d'un disque



Contrainte σ_{xx}

Quelques exemples de problèmes

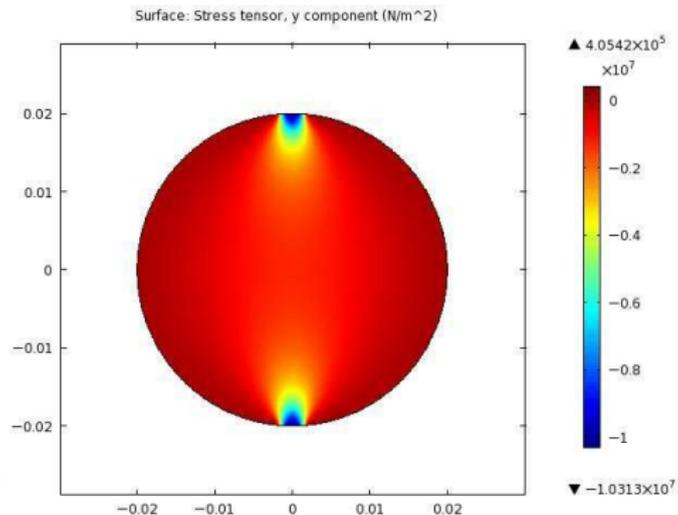
Compression diamétrale d'un disque



Contrainte σ_{xy}

Quelques exemples de problèmes

Compression diamétrale d'un disque



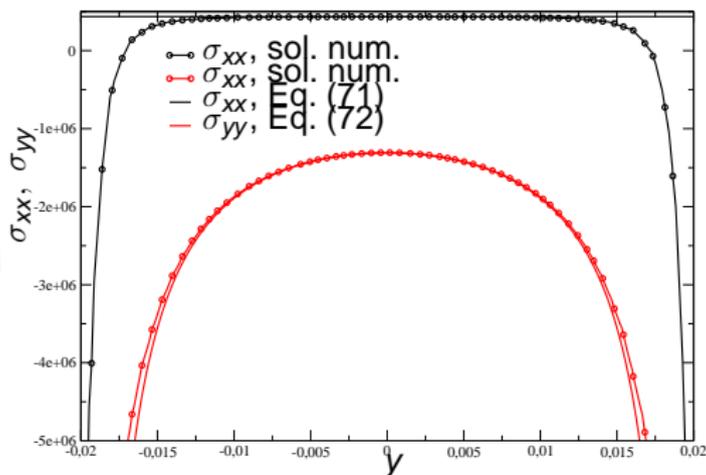
Contrainte σ_{yy}

Quelques exemples de problèmes

Compression diamétrale d'un disque

$$\sigma_{xx} = \frac{F}{\pi R e}, \quad (71)$$

$$\sigma_{yy} = \frac{-F}{\pi R e} \frac{3R^2 + y^2}{R^2 - y^2}, \quad (72)$$



Quelques exemples de problèmes

Equation de Burgers

- u vérifie l'équation de diffusion/advection non-linéaire suivante

$$u \frac{du}{dx} - \nu \frac{d^2 u}{dx^2} = 0, \quad (73)$$

sur $\Omega =]-1, 1[$ avec

$$u(-1) = 1, \quad (74)$$

$$u(1) = -1. \quad (75)$$

- u admet la solution exacte suivante

$$u_{\text{ex}}(x) = A \tanh \left(-\frac{Ax}{2\nu} \right), \quad (76)$$

avec

$$A \tanh \left(\frac{A}{2\nu} \right) = 1. \quad (77)$$

Quelques exemples de problèmes

Equation de Burgers

- Formulation faible à l'aide de la méthode de Galerkin :

$$\begin{aligned} &\text{Trouver } u_h \in H_0^1(\Omega), \text{ tel que} \\ &a(u_h, v_h) = 0, \quad \forall v_h \in H_0^1(\Omega), \end{aligned} \quad (78)$$

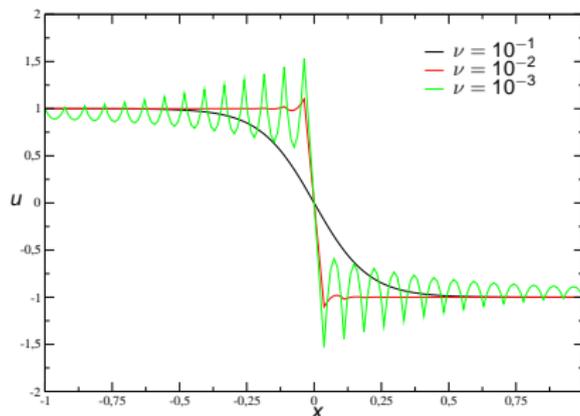
où $a(u_h, v_h)$ est donné par

$$a(u_h, v_h) = \int_{-1}^1 \left(u_h \frac{du_h}{dx} v_h + \nu \frac{du_h}{dx} \frac{dv_h}{dx} \right) dx. \quad (79)$$

- $a(u_h, v_h)$ n'est pas un opérateur symétrique.

Quelques exemples de problèmes

Equation de Burgers



- Pour que la formulation de Galerkin soit stable, il faut que

$$a(u_h, u_h) \geq \alpha_h \|u_h\|_1^2. \quad (80)$$

- Propriété de coercivité plus assurée pour ν petit.

Quelques exemples de problèmes

Equation de Burgers

- Utilisation d'une formulation de type moindres carrés :

$$\int_{-1}^1 \left(u_h \frac{du_h}{dx} - \nu \frac{d^2 u_h}{dx^2} \right) \left(v_h \frac{dv_h}{dx} - \nu \frac{d^2 v_h}{dx^2} \right) dx = 0. \quad (81)$$

- Opérateur non-linéaire mais symétrique ce qui assure de bonnes conditions de solvabilité.
- Avec des éléments finis H^1 conforme, on ne sait pas donner un sens au terme de dérivée seconde sur l'ensemble du domaine.
- Utilisation d'une méthode mixte Galerkin/moindres carrés :
 - On formule le terme moindres carrés sur chaque élément.

Quelques exemples de problèmes

Equation de Burgers

■ La formulation Galerkin/moindres carrés prend la forme suivante :

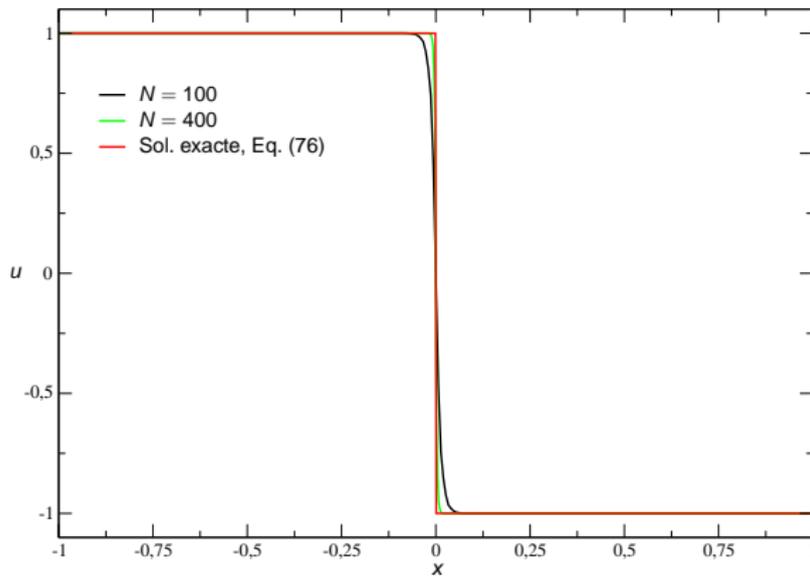
$$\begin{aligned} & \text{Trouver } u_h \in H_0^1(\Omega), \text{ tel que} \\ & a(u_h, v_h) + \\ & \sum_{K \in \Omega_h} \tau(h_K) \int_K \left(u_h \frac{du_h}{dx} - \nu \frac{d^2 u_h}{dx^2} \right) \left(v_h \frac{dv_h}{dx} - \nu \frac{d^2 v_h}{dx^2} \right) dx = 0, \quad (82) \\ & \forall v_h \in H_0^1(\Omega), \end{aligned}$$

avec

$$\tau(h_K) = \min \left(\frac{h_K}{|u_{h,K}|}, \frac{h_K^2}{12\nu} \right), \quad (83)$$

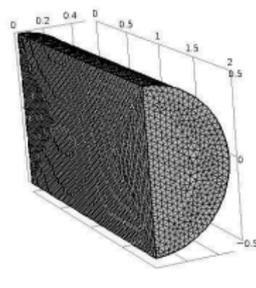
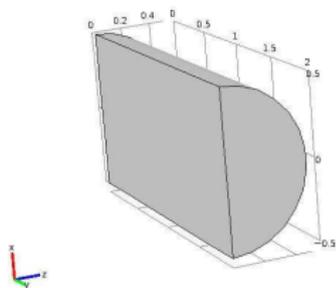
Quelques exemples de problèmes

Equation de Burgers



Quelques exemples de problèmes

Ecoulement forcé dans un demi-cylindre



■ Equations de Navier-Stokes normalisées :

$$\operatorname{div} \mathbf{U} = 0, \quad (84)$$

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \operatorname{grad} \mathbf{U} \cdot \mathbf{U} = -\operatorname{grad} P + \frac{1}{Re} \Delta \mathbf{U}, \quad (85)$$

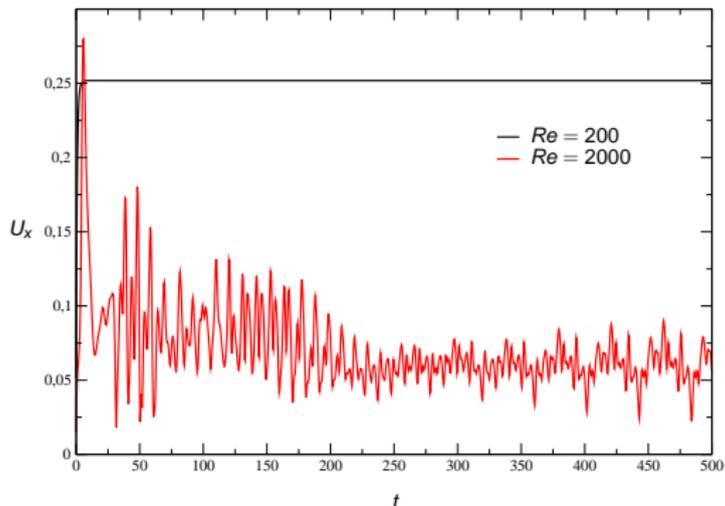
avec

$$Re = \frac{\rho U D}{\mu}. \quad (86)$$

Quelques exemples de problèmes

Ecoulement forcé dans un demi-cylindre

- Utilisation d'une formulation mixte Galerkin/moindres carrés.
- Etude de l'influence du nombre de Reynolds.



Travaux dirigés

Equation de Poisson avec terme source ponctuel

- Soit sur un disque de rayon unité, le problème suivant

$$-\operatorname{div}(\mathbf{grad} u) = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0), \quad (87)$$

avec

$$u = 0, \text{ pour } r = 1. \quad (88)$$

- La formulation faible de ce problème est

$$\int_{\mathcal{D}} \frac{\partial u}{\partial \mathbf{x}_i} \frac{\partial v}{\partial \mathbf{x}_i} dS = v(\mathbf{x}_0). \quad (89)$$

- Dans l'exemple, $\mathbf{x}_0 = 0$.

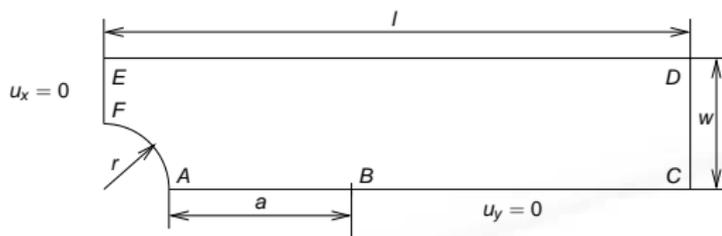
- La solution exacte est la fonction de Green de l'équation de Laplace :

$$u(\mathbf{x}) = -\frac{1}{2\pi} \ln(r). \quad (90)$$

Travaux dirigés

Propagation d'un front de fissure

- Il s'agit d'un problème d'élasticité linéaire en contrainte plane.
- La géométrie est la suivante



l (mm)	20
w (mm)	2
r (mm)	0,4
a (mm)	10
e (mm)	5

Propriété	Valeur	Unité
E	$70 \cdot 10^9$	Pa
ν	0,23	—
ρ	2500	kg/m ³

Travaux dirigés

Transfert de masse autour d'une bulle

- L'objectif est de calculer le coefficient de transfert de masse autour d'une bulle placée dans un écoulement en fonction de l'importance de la vitesse.
- Le problème est normalisé à l'aide du diamètre de la bulle, de la vitesse d'ascension de cette dernière et de la différence de concentration à la surface de la bulle et à l'infini.
- L'équation d'advection/diffusion s'écrit sous la forme

$$u_z \frac{\partial C}{\partial z} + u_r \frac{\partial C}{\partial r} = \frac{1}{Pe} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial C}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 C}{\partial z^2} \right], \quad (91)$$

avec

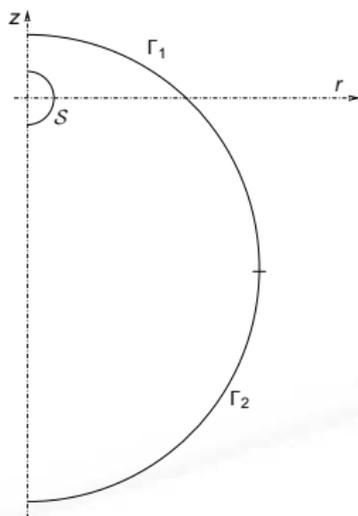
$$u_r = \frac{zr}{4(z^2 + r^2)^{3/2}}, \quad (92)$$

$$u_z = -1 + \frac{r^2 + 2z^2}{4(z^2 + r^2)^{3/2}}, \quad (93)$$

$$Pe = \frac{2aU_T}{D}. \quad (94)$$

Travaux dirigés

Transfert de masse autour d'une bulle



$$C = 1, \text{ sur } S, \quad (95)$$

$$C = 0, \text{ sur } \Gamma_1, \quad (96)$$

$$\frac{\partial C}{\partial n} = 0, \text{ sur } \Gamma_2. \quad (97)$$

On cherchera à déterminer en fonction de Pe

$$Sh = \frac{\int_S \frac{\partial C}{\partial n} |_{\mathcal{S}} dS}{\pi}. \quad (98)$$